HACIA UNA INVESTIGACION AGROPECUARIA EFICIENTE: ANALISIS DE COVARIANCIA EN EL DISEÑO EN PARCELAS DIVIDIDAS

MARIA DEL CARMEN FABRIZIO y A. GARSD[1]

Recibido: 13/05/93
Aceptado: 03/09/93

RESUMEN

La metodología para el análisis de covariancia en diseños en parcelas divididas es tratado en forma incompleta en la literatura y en los paquetes de computación estadísticos. Este artículo provee en forma detallada las fórmulas para confeccionar la Tabla de análisis de covariancia, así como las fórmulas para distintas estimaciones, para experimentos arreglados en diseños en parcelas divididas. Se muestra el uso de un programa de computación estadístico para resolver dos ejemplos del área agropecuaria.

Palabras clave: Análisis de covariancia; Diseños en parcelas divididas; Covariable; Variancias.

TOWARDS EFFICIENT AGRICULTURAL EXPERIMENTS: COVARIANCE ANALYSIS IN SPLIT-PLOT DESINGS

SUMMARY

The analysis of covariance (ANCOVA) for split-plot designs has received incomplete treatment in both the literature and statistical packages. This report provides detailed formulae to build the ANCOVA Table, and various estimates intrinsic to split-plot designs. It is shown how a commonly available statistical package can be used to analyze two concrete agricultural experiments.

Key words: Analysis of covariance; Split-plot designs; Covariate; Variances.

---

[1] Cátedra de Estadística, Facultad de Agronomía, Universidad de Bs. As., Av. San Martín 4453 (1417) Buenos Aires Argentina

INTRODUCCION

Un diseño particularmente útil en el área agropecuaria es el denominado de parcelas divididas. Tradicionalmente se lo utiliza cuando se desean comparar simultáneamente los efectos de dos factores y, por la naturaleza de los niveles de uno de ellos, es necesario usar parcelas o unidades experimentales grandes dispuestas, por ejemplo, en un diseño en bloques completos al azar (DBCA). En tales circunstancias, se divide cada parcela en tantos lotes o subparcelas como niveles del otro factor existan, asignándolos aleatoriamente dentro de cada parcela.

La **Figura 1** muestra un esquema de este diseño para probar cuatro niveles de un factor A (A1, A2, A3 y A4) en un DBCA. Dentro de cada bloque cada nivel se asigna aleatoriamente a una parcela de terreno. El diseño prueba simultáneamente un nuevo factor B a tres niveles (B1, B2 y B3) en combinación con cada uno de los niveles del factor A. Cada parcela está dividida en tres subparcelas, asignándosele al azar a estas subparcelas los tres niveles del factor B. La subparcela es así la unidad experimental para el factor B.

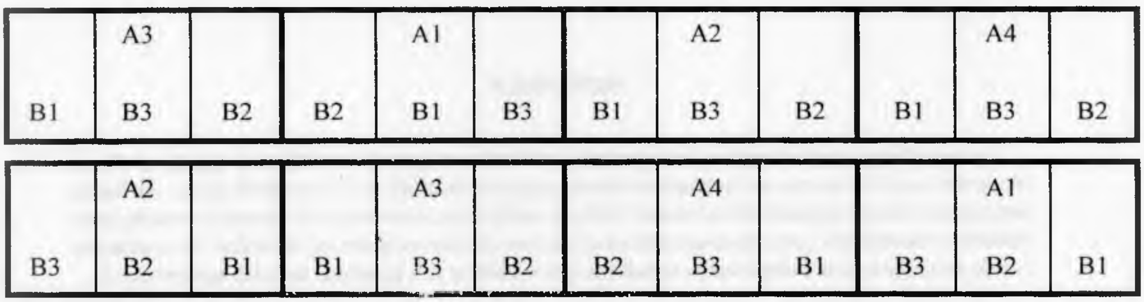

Figura 1. Esquema de un diseño en parcelas divididas en bloques completos aleatorizados. Diseño con cuatro niveles del factor para las parcelas y tres niveles del factor para las subparcelas dentro de cada parcela.

Existen factores tales como métodos de labranza o aplicación de un fertilizante que, debido a la utilización de maquinaria agrícola, pueden requerir parcelas relativamente grandes. Mientras que otros factores, como por ejemplo las variedades de un cultivo, pueden ser comparados mediante el uso de parcelas pequeñas (Steel y Torrie, 1980).

A diferencia de un experimento factorial, el diseño en parcelas divididas permite disponer de parcelas grandes para el factor que así lo requiera por necesidades experimentales y simultáneamente ensayar otro factor combinado con el anterior, incrementando la precisión del factor asignado a las subparcelas, así como la precisión de la interacción entre el factor de las parcelas y el de las subparcelas (Winer, 1971).

Una técnica que complementa al diseño anterior para reducir la variabilidad experimental y mejorar la interpretación de los resultados es el análisis de covariancia (ANCOVA). Su uso se presenta cuando una covariable está correlacionada con la variable respuesta, comprometiendo la validez o la significatividad de los resultados. El ANCOVA resultante es más preciso que su correspondiente análisis de la variancia (ANOVA) (Ostle, 1968).

Sin embargo, la metodología para el análisis de covariancia en diseños en parcelas divididas es tratado en forma incompleta en la literatura y en los paquetes de computación estadísticos.

El objetivo de este artículo es proveer en forma detallada y completa la Tabla de análisis de variancia para experimentos arreglados en un diseño en parcelas divididas, donde una covariable ha sido medida sobre la menor unidad experimental. Un objetivo adicional es obtener dicha Tabla de ANCOVA usando un sistema estadístico de computación.

METODOS

El modelo de análisis de covariancia en parcelas divididas

Sean r el número de bloques o réplicas, a el número de niveles del factor aplicado a las parcelas, b el número de niveles del factor aplicado a las subparcelas. Si con i (i = 1,...,r) se indexa a los bloques, con j (j = 1,...,a) se indexa a las parcelas y con k (k=1,...,b) se indexa a las subparcelas, entonces la observación Y_{ijk} con una covariable asociada X_{ijk} puede representarse mediante la siguiente ecuación:

$$Y_{ijk}=\mu+\rho_i+\tau_j+\delta_{ij}+\alpha_k+(\tau\alpha)_{jk}+\beta_1(\bar{X}_{ij.}-\bar{X}_{...})+\beta_2(X_{ijk}-\bar{X}_{ij.})+\varepsilon_{ijk} \qquad (I),$$

donde Y_{ijk} es la respuesta del bloque i, parcela j, subparcela k; μ es el promedio general; ρ_i es el efecto aleatorio del bloque i, distribuído con media cero y desvío típico σ_ρ; τ_j es el efecto del nivel j del factor correspondiente a las parcelas; δ_{ij} es el efecto del error aleatorio asociado a la primera etapa de aleatorización que corresponde al bloque i, nivel j del factor de las parcelas, con distribución normal con media cero y desvío típico σ_δ; α_k es el efecto del nivel k del factor correspondiente a las subparcelas; $(\tau\alpha)_{jk}$ es el efecto de la interacción para la combinación del nivel j del factor correspondiente a las parcelas y el nivel k de las subparcelas; β_1 es el coeficiente de regresión lineal correspondiente a las parcelas; β_2 es el coeficiente de regresión lineal correspondiente a las subparcelas; X_{ijk} es el valor de la covariable en el bloque i, parcela j, subparcela k; ε_{ijk} es el efecto del error aleatorio asociado a la segunda etapa de al[...] errores δ_{ij} y ε_{ijl}

$$\sum \tau_j = 0\ ,\quad \sum \alpha_k = 0\ ,\quad \sum_j (\tau\alpha)_{jk} = 0\ ,\quad \sum_k (\tau\alpha)_{jk} = 0\ .$$

$$\sum \tau_j = 0\ ,\quad \sum \alpha_k = 0\ ,\quad \sum_j (\tau\alpha)_{jk} = 0\ ,\quad \sum_k (\tau\alpha)_{jk} = 0\ .$$

Como es costumbre en la simbología, el punto como subíndice implica que se suma sobre el subíndice que se reemplaza por el punto y la barra sobre una variable indica promedio. En particular, $\bar{x}_{ij}$ es el promedio de la covariable para el bloque i, parcela j, y $\bar{x}$... es el promedio general de la covariable.

Los valores de μ, τ, α, ($\tau\alpha$), β son parámetros desconocidos a ser estimados de los datos.

Tabla de ANCOVA en parcelas divididas

El análisis de covariancia correspondiente al modelo (1) se muestra en la **Tabla N°1**. Las fórmulas explícitas para dicho ANCOVA se presentan en el Apéndice.

Tabla N°1: Análisis de covariancia (ANCOVA) en el diseño de parcelas divididas

Fuente de variación	Grados de libertad	SC y^2	o xy	SP x^2
Bloques	r - 1	R_{yy}	R_{xy}	R_{xx}
A	a - 1	W_{yy}	W_{xy}	W_{xx}
Error(a)	(r-1)(a-1)	A_{yy}	A_{xy}	A_{xx}
B	b - 1	T_{yy}	T_{xy}	T_{xx}
A * B	(a-1)(b-1)	I_{yy}	I_{xy}	I_{xx}
Error(b)	a(r-1)(b-1)	B_{yy}	B_{xy}	B_{xx}
Total	rab - 1	S_{yy}	S_{xy}	S_{xx}

		SC Ajustadas	CM Aj
A(aj)	a - 1	SCW_{yy}	CMW_{yy}
Error(a)(aj)	(r-1)(a-1)-1	SCA_{yy}	E_a
B(aj)	b - 1	SCT_{yy}	CMT_{yy}
A * B (aj)	(a-1)(b-1)	SCI_{yy}	CMI_{yy}
Error(b)(aj)	a(r-1)(b-1)-1	SCB_{yy}	E_b

Nota: Con A se simboliza al factor ubicado en las parcelas y con B al factor de las subparcelas.

En el análisis del diseño en parcelas divididas hay dos variancias del error: una correspondiente al factor de las parcelas y otra correspondiente al factor de las subparcelas. Generalmente las subparcelas dentro de cada parcela son más homogéneas que las mismas parcelas. Por esta razón la variancia del error de las parcelas habitualmente es mayor que la variancia del error de las subparcelas. Por lo tanto, el factor más importante debe ser asignado a las subparcelas, las que, al tener una variancia menor, permiten la comparación de sus niveles con mayor precisión.

Pruebas de hipótesis

De la **Tabla N°1** del ANCOVA en parcelas divididas resultan las siguientes pruebas de hipótesis:

a) Prueba de hipótesis para la interacción entre los factores correspondientes a las parcelas y a las subparcelas.

$H_0:(\tau\alpha)_{jk} = 0$ para todo (j , k) , H_1 $(\tau\alpha)_{jk} \neq 0$ para algún (j,k).

El estadístico de la prueba es:

$$F^* = \frac{CMI_{YY}}{E_b} \quad .$$

Si H_0 es verdadera F^* sigue la distribución F de Snedecor con (a-1)(b-1) grados de libertad en el numerador y a(r-1)(b-1)-1 grados de libertad en el denominador.

b) Prueba de hipótesis para los efectos del factor de las subparcelas.

$H_0:\alpha_k = 0$ para todo k, $H_1: \alpha_k \neq 0$ para algún k.

El estadístico de la prueba es:

$$F^* = \frac{CMT_{YY}}{E_b} \quad .$$

Si H_0 es verdadera F^* sigue la distribución F de Snedecor con (b-1) grados de libertad en el numerador y a(r-1)(b-1)-1 grados de libertad en el denominador.

c) Prueba de hipótesis para los efectos del factor de las parcelas.

$H_0:\tau_j = 0$ para todo j. $H_1: \tau_j \neq 0$ para algún j.

El estadístico de la prueba es:

$$F^* = \frac{CMW_{YY}}{E_a} \quad .$$

Si H_0 es verdadera F^* sigue la distribución F de Snedecor con (a-1) grados de libertad en el denominador y (r-1)(a-1)-1 grados de libertad en el numerador.

Estimación de las variancias para una diferencia de medias, de los coeficientes de regresión lineal y de las medias ajustadas por la covariable.

Para completar el análisis se requieren las variancias estimadas para una diferencia de dos medias ajustadas (necesarias para comparar pares de medias individuales), los estimadores de los coeficientes de regresión lineales correspondientes al modelo (I), y las diferentes medias ajustadas por la covariable (Cátedra de Estadística, 1992), (Federer, 1992).

Obtención de la Tabla de ANCOVA en parcelas divididas mediante un sistema de computación estadístico

Una forma de evitar tener que realizar manualmente los engorrosos cálculos del ANCOVA, presentadas en el Apéndice, es usar un sistema estadístico de computación. Para el presente informe se utilizó Statgraphics (1991). La **Tabla N°1** puede ser obtenida teniendo en cuenta las modificaciones citadas en el Informe Técnico (Cátedra de Estadística, 1992).

EJEMPLOS AGRONOMICOS

A continuación se presentan dos ejemplos reales pero con datos hipotéticos del área agropecuaria en los cuales se muestra la conveniencia del uso del análisis de covariancia en parcelas divididas.

Ejemplo 1

Se sabe que en el engorde de ganado, uno de los factores de importancia es el tiempo requerido para obtener los animales en condiciones corporales óptimas para su venta. Ciertos compuestos anabólicos benefician en la ganancia de peso.

En el presente contexto, se intentan demostrar las diferencias en las ganancias diarias de peso vivo en el ganado vacuno por el uso de anabólicos y la interacción de éstos con diferentes potreros. La experiencia se realizó en un establecimiento agropecuario del Partido de Benito Juárez, en el sudeste de la Provincia de Buenos Aires. Se trabajó con terneros de destete de raza Aberdeen Angus de un año. Se usaron 4 bloques, según las 4 procedencias de los animales: Chascomús, Junín, Carlos Casares y Las Flores. Se considera como factor A a 3 diferentes potreros: campo natural (control), campo natural intersembrado y verdeo de avena, contando en total con 36 parcelas de 1 ha cada una. El factor B está constituído por los diferentes anabólicos: control (sin anabólicos), un anabólico preparado en base a hormonas naturales y un anabólico artificial. Se considera como variable respuesta a la ganancia diaria medida en g. Se realizó un ajuste de los datos por medio de la variable concomitante X, peso inicial de los animales, medido en kg.

Los datos (n = 36) se presentan en el **Cuadro N°1**.

Cuadro N°1. Datos del ensayo de la incidencia en la ganancia de peso en terneros de distintas procedencias por el uso de anabólicos en distintos potreros #

Proce-dencias	Anabó-licos	Potreros					
		A1		A2		A3	
		X	Y	X	Y	X	Y
1	B1	192	734	215	730	223	725
	B2	218	730	246	723	226	728
	B3	255	723	246	728	229	729
2	B1	216	730	222	725	195	734
	B2	240	728	225	727	232	725
	B3	231	727	244	728	255	725
3	B1	214	728	195	734	228	727
	B2	242	726	228	728	220	726
	B3	215	731	253	720	242	729
4	B1	216	730	226	725	198	734
	B2	225	728	236	728	245	724
	B3	245	726	237	727	240	727

(Y = Ganancia de peso diario en g X = Peso inicia en kg. Procedencias: 1: Chascomús, 2: Junín, 3: Carlos Casares, 4: Las Flores. Potreros: A1: Campo natural, A2: Campo natural intersembrado, A3: Verdeo de avena. Anabólicos: B1: Control, B2: Anabólico hormonal, B3: Anabólico artificial)

El análisis se presenta en el **Cuadro N°2**.

Cuadro N°2. Análisis de los datos del ejemplo 1≠

Fuente de variación	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	Valor F	Nivel de Sig.
COVARIABLES					
Peso Inic.	195,87827	1	195,87827	52,340	.0000
EFECTOS PRINCIPALES					
A: Proced.	2,842280	3	,947427	,253	,8580
B: Potrero	,575782	2	,287891	,077	,9263
C: Anabol.	35,252854	2	17,626427	4,710	,0236
INTERACCIONES					
AB	8,981160	6	1,4968600	,400	,8688
BC	19,334286	4	4,8335715	1,292	,3125
ERROR	63,621727	17	3,7424545		
TOTAL (Corregido)	359,63889	35		.	

Realizando los cambios necesarios y los cálculos de las sumas de cuadrados de acuerdo a las fórmulas dadas en Métodos, resulta el verdadero análisis de covariancia para este ejemplo, mostrado en el **Cuadro N°3.**

Cuadro N°3. ANCOVA en parcelas divididas para los datos del ejemplo 1 #

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F*	P
Potrero	4.536108	2	2.268054	3.411	0.116
Error(a)	3.324253	5	0.664851		
Anabol	35.263067	2	17.631533	4.712	0.024
Potrero*Anabol	19.347944	4	4.836985	1.293	0.312
Error(b)	63.607121	17	3.741595		

Anabol : Anabólicos.
F.V. : Fuentes de variación.
S.C. : Sumas de cuadrados.
G.L. : Grados de libertad.
C.M. : Cuadrados medios.
F* : Valor F* (ver fórmulas en Métodos).
P : Nivel de significatividad.

De la misma se obtienen las siguientes conclusiones: no existen interacciones entre potreros y anabólicos (p = 0,31); existen diferencias significativas entre anabólicos (p = 0,02); no hay diferencias significativas entre potreros (p = 0.12).

De no considerar la covariable X en el análisis, se obtendrían diferentes conclusiones.

El **Cuadro N°4** es el correcto análisis de la variancia en parcelas divididas. Como se desprende de la Tabla, no existen interacciones entre potreros y anabólicos (p = 0,93); tampoco existen diferencias significativas entre los anabólicos (p = 0,12) pero existen diferencias significativas entre los potreros (p = 0,02).

Cuadro N°4. Análisis de variancia en parcelas divididas para los datos del ejemplo 1.

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F*	P
Proced	0,0844	3	0,028133	0,036	0,990
Potrero	13.5600	2	6,780000	8,726	0,017
Error(a)	4.6622	6	0,777033		
Anabol	70,0566	2	35,028300	2,430	0,116
Potrero*Anabol	11,7734	4	2,94335	0,204	0,933
Error(b)	259,5034	18	14,416855		

Proced : Procedencia.
Anabol : Anabólicos.

Ejemplo 2

Este ejemplo está desarrolllado en detalle en un Informe Técnico (Cátedra de Estadística, 1992). En esencia se desea estudiar la incidencia en los rendimientos de maiz de diferentes genotipos plantados en distintas fechas de siembra. Para ello se realizó un ensayo en Rojas, Provincia de Buenos Aires, empleando un diseño en parcelas divididas, usando bloques para eliminar el efecto de un posible gradiente de fertilidad en el suelo. Se considera como factor A a las fechas de siembra (18-08-90, 20-09-90, 20-10-90 y 20-11-90) para tener áreas contiguas sembradas en el mismo tiempo. El factor B corresponde a los diferentes genotipos: 4K91, DK636, 3S41 y 3F24, ya que para ellos es posible emplear parcelas largas y angostas. La variable respuesta Y representa los rendimientos expresados en kg/ha. Se considera como covariable X al número de plantas por m^2. Se desea conocer con mayor precisión la interacción entre genotipos y las fechas de siembra, y los rendimientos producidos por los diferentes genotipos más que por las fechas.

Del análisis se obtienen las siguientes conclusiones, de acuerdo al **Cuadro N°5**. Existe una tendencia a la significatividad en la interacción entre fechas y genotipos (nivel de significación p = 0,07). Se ve también que no hay diferencias significativas entre los distintos genotipos (p = 0,90). Finalmente, se observa que no hay diferencias significativas entre las diferentes fechas (p = 0,75).

Cuadro N°5. ANCOVA en parcelas divididas para los datos del ejemplo 2.

F.V.	S.C.	G.L.	C.M.	F*	P
Fecha	167.007,93	3	55.669,310	0,418	0,748
Error(a)	665.455,81	5	133.091,162		
Genotipo	37.532,49	3	12.510,830	0,187	0,904
Fecha*Genotipo	1.304.293,78	9	144.921,531	2,164	0,065
Error(b)	1.540.287,19	23	66.969,008		

Nótese que de no considerar la covariable X en el análisis, se obtendrían diferentes resultados. Por brevedad se omiten los detalles. El resultado final es que no hay interacción detectable entre fechas y genotipos ($p = 0,90$). Existen diferencias significativas entre los diferentes genotipos ($p < 0,001$) y existen diferencias significativas entre las distintas fechas ($p = 0,03$).

CONCLUSIONES

Es común realizar ensayos multifactoriales en diseños en parcelas divididas en donde uno de los factores necesita unidades experimentales grandes. También se utiliza este diseño cuando el interés del investigador se centra en uno de los factores en particular, y en la interacción entre ambos factores. Si, además, se considera que una covariable está correlacionada con la variable respuesta, y las suposiciones del ANCOVA son válidas, se impone realizar el correspondiente ajuste de los datos mediante el análisis de covariancia. Este ajuste propone resolver dos problemas típicos. El primero ocurre cuando al ignorar la variable concomitante se subestiman a los factores (Ejemplo 1). El segundo cuando al no considerarla se sobreestiman a los factores (Ejemplo 2).

En este trabajo se ha supuesto una regresión lineal simple entre la covariable (medida sobre la menor unidad experimental) y la variable respuesta. En la mayoría de los casos la relación lineal entre ambas variables es sólo una aproximación. Si la relación entre la covariable X y la variable respuesta Y es curvilínea, es posible usar alguna función de X (tal como logaritmo) que transforma la relación en una lineal.

RECONOCIMIENTOS

Los autores agradecen las sugerencias y la lectura crítica del trabajo por parte de la Ing. Agr. María Virginia López, de la Estadística Susana Delfino, y de la Doctora Elsa Servy, así como la colaboración del Sr. Sergio Micucci en la elaboración de los ejemplos.

BIBLIOGRAFIA

- **CÁTEDRA DE ESTADÍSTICA**. (1992). Hacia una investigación agropecuaria eficiente: análisis de covariancia en el diseño en parcelas divididas. Informe Técnico Número 2. Facultad de Agronomía. UBA. Buenos Aires.
- **FEDERER, W. T.** (1955). *Experimental designs: theory and application*. Macmillan Co. New York, pp. 271-306, 483-505.
- **FEDERER, W. T. and MEREDITH, M. P.** (1992). Covariance analysis for split-plot and split-block designs. *The American Statistician*, 46, pp. 155-162.
- **OSTLE, B.** (1968). Estadística aplicada. Limusa-Wiley. México, pp. 475-505.
- **SATTERTHWAITE, F.E.** (1946). An approximate distribution of estimates of variance components. *Biometrics Bulletin*, 2, pp. 110-114.
- **STATGRAPHICS, Statistical Graphics System Statistical Graphics Corporation.** 1991. Versión 5.0.
- **STEEL, R. G. D. and TORRIE, J. H.** (1980). *Principles and procedures of statistics*. Mc Graw-Hill. New York. pp. 377-437.
- **WINER, B. J.** (1971). *Statistical principles in experimental design*. Mc Graw-Hill. New York. pp. 366-371, 752-812.

APENDICE

Tabla de ANCOVA en parcelas divididas

El análisis de covariancia comienza con un análisis de variancia habitual que luego se ajusta por el uso de variable concomitante. Así la primera parte del ANCOVA muestra la suma de cuadrados (SC) y las sumas de productos (SP) referidas a las variables X e Y (los subíndices YY, XX, XY son utilizados para aclarar la identificación, el resto de la notación es como en Métodos).

El análisis de la variancia en un diseño en parcelas divididas tiene dos partes, que corresponden a las parcelas y a las subparcelas, cada una con su correspondiente término error. Los pasos de dicho análisis para la variable Y son los siguientes:

Primero, encontrar la suma de cuadrados total:

$$S_{yy}=\sum_{i}\sum_{j}\sum_{k} Y_{ijk}^{2}-\frac{Y_{\cdots}^{2}}{rab} \qquad (II) \ .$$

Segundo, completar el análisis de las parcelas, el cual se desdobla en la suma de cuadrados de bloques:

$$R_{yy}=\frac{\sum_{i} {}_{\cdot i\cdot\cdot}}{ab}-\frac{Y_{\cdots}^{2}}{rab} \qquad (III) \ ,$$

la suma de cuadrados del factor correspondiente a las parcelas:

$$W_{yy}=\frac{\sum_{j} Y_{\cdot j\cdot}^{2}}{rb}-\frac{Y_{\cdots}^{2}}{rab} \qquad (IV) \ ,$$

y la suma de cuadrados del error en las parcelas:

$$A_{yy}=\frac{\sum_{i}\sum_{j} Y_{ij\cdot}^{2}}{b}-\frac{Y_{\cdots}^{2}}{rab}-R_{yy}-W_{yy} \qquad (V) \ .$$

Tercero, completar el análisis para las subparcelas, el que se compone de la suma de cuadrados del factor correspondiente a las subparcelas:

$$T_{yy}=\frac{\sum_{k} Y_{\cdot\cdot k}^{2}}{ra}-\frac{Y_{\cdots}^{2}}{rab} \qquad (VI) \ ,$$

la suma de cuadrados de la interacción entre los factores correspondientes a las parcelas y a las subparcelas:

$$I_{yy}=\frac{\sum_{j}\sum_{k} Y_{\cdot jk}^{2}}{r}-\frac{Y_{\cdots}^{2}}{rab}-W_{yy}-T_{yy} \qquad (VII) \ ,$$

y la suma de cuadrados del error de las subparcelas:

$$B_{yy}=S_{yy}-\frac{\sum_{i}\sum_{j} Y_{ij\cdot}^{2}}{b}+\frac{Y_{\cdots}^{2}}{rab}-T_{yy}-I_{yy} \qquad (VIII) \ .$$

El mismo análisis debe realizarse para la covariable X, reemplazando en las fórmulas anteriores Y por X.

Análogamente, se obtienen las fórmulas correspondientes a las sumas de productos:

$$S_{xy}=\sum_i\sum_j\sum_k Y_{ijk}X_{ijk}-\frac{Y_{...}X_{...}}{rab} \qquad (II') .$$

$$R_{xy}=\frac{\sum_i Y_{i..}X_{i..}}{ab}-\frac{Y_{...}X_{...}}{rab} \qquad (III') .$$

$$W_{xy}=\frac{\sum_j Y_{.j.}X_{.j.}}{rb}-\frac{Y_{...}X_{...}}{rab} \qquad (IV') .$$

$$A_{xy}=\frac{\sum_i\sum_j Y_{ij.}X_{ij.}}{b}-\frac{Y_{...}X_{...}}{rab}-R_{xy}-W_{xy} \qquad (V') .$$

$$T_{xy}=\frac{\sum_k Y_{..k}X_{..k}}{ra}-\frac{Y_{...}X_{...}}{rab} \qquad (VI') .$$

$$I_{xy}=\frac{\sum_j\sum_k Y_{.jk}X_{.jk}}{r}-\frac{Y_{...}X_{...}}{rab}-W_{xy}-T_{xy} \qquad (VII') .$$

$$B_{xy}=S_{xy}-\frac{\sum_i\sum_j Y_{ij.}X_{ij.}}{b}+\frac{Y_{...}X_{...}}{rab}-T_{xy}-I_{xy} \qquad (VIII') .$$

Una vez obtenidas las SC y las SP, se ajusta el análisis de variancia para Y, para obtener el análisis de covariancia. El ANCOVA se presenta en la segunda parte de la **Tabla N°1**. Nótese que se pierde un grado de libertad para cada uno de los errores. La razón es la estimación de los coeficientes de regresión para la variable concomitante. Las fórmulas correspondientes a las sumas de cuadrados ajustadas en la Tabla de ANCOVA son:

$$SCW_{yy}=W_{yy}-\frac{(W_{xy}+A_{xy})^2}{W_{xx}+A_{xx}}+\frac{A_{xy}^2}{A_{xx}}$$

$$SCA_{yy}=A_{yy}-\frac{A_{xy}^2}{A_{xx}}$$

$$SCT_{yy}=T_{yy}-\frac{(T_{xy}+B_{xy})^2}{T_{xx}+B_{xx}}+\frac{B_{xy}^2}{B_{xx}}$$

$$SCI_{yy}=I_{yy}-\frac{(I_{xy}+B_{xy})^2}{I_{xx}+B_{xx}}+\frac{B_{xy}^2}{B_{xx}}$$

$$SCB_{yy}=B_{yy}-\frac{B_{xy}^2}{B_{xx}} .$$

Los cuadrados medios (CM) en el ANCOVA se obtienen dividiendo las sumas de cuadrados ajustadas por sus correspondientes grados de libertad.